

ÜBER DAS
ANWACHSEN VON POTENTIALFUNKTIONEN
IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VON

HANS HEINRICH KELLER

AUS ZUERICH UND WETZIKON (KT. ZCH.)

BEGUTACHTET VON

HERRN PROF. Dr. R. NEVANLINNA

HELSINKI 1950
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

ÜBER DAS
ANWACHSEN VON POTENTIALFUNKTIONEN
IM DREIDIMENSIONALEN RAUM

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VON

HANS HEINRICH KELLER

AUS ZUERICH UND WETZIKON (KT. ZCH.)

BEGUTACHTET VON

HERRN PROF. Dr. R. NEVANLINNA

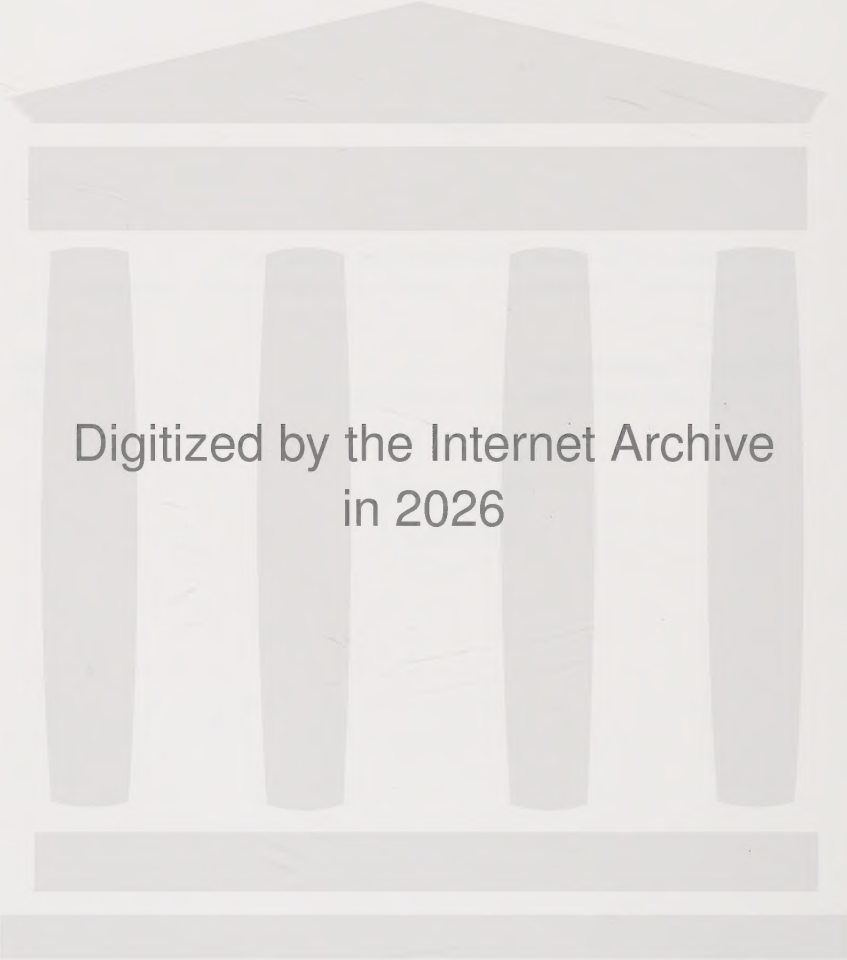
HELSINKI 1950
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA



HELSINKI 1950
KIRJAPAINO O.Y. SANA

Inhalt:

	Seite
Einleitung	5
Erster Teil: Funktionen, die in einem Halbraum harmonisch sind	8
Zweiter Teil: Harmonische Funktionen in einem nichtbeschränkten beliebigen Gebiet	25
A. Carlemans Ungleichung	25
B. Asymptotische Auswertung der Ungleichung (11)	30



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507213_0073

Einleitung.

Eine charakteristische Eigenschaft der harmonischen Funktionen $U(P) = U(x, y, z)$ ist bekanntlich die Gültigkeit des Mittelwertsatzes: Ist $U(P)$ in der Umgebung einer Stelle P_0 harmonisch d.h. eine zweimal stetig nach allen drei Variablen differentiierbare Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta U = 0$, so ist $U(P_0)$ gleich dem arithmetischen Mittel der Funktionswerte auf der Oberfläche einer Kugel mit Zentrum P_0 , die noch ganz im Innern des Regularitätsbereiches von U liegt. Daraus folgt sofort, dass eine harmonische Funktion in keinem inneren Punkt eines Gebietes, in dem sie regulär ist, ein relatives Extremum annehmen kann. Dieser Sachverhalt wird gewöhnlich als Maximumprinzip so formuliert: Sei $U(P)$ im Innern eines Gebietes G regulär harmonisch und gelte für jeden Randpunkt Q von G die Bedingung $\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} U(P) \leq A$; dann ist $U(P) \leq A$ in G , wobei das Gleichheitszeichen für einen inneren Punkt P von G dann und nur dann gilt, wenn $U = \text{const.} = A$ in G . Indem wir die Voraussetzungen etwas lockern, erreichen wir eine Erweiterung des Maximumprinzips: Ist $U(P)$ harmonisch in G und beschränkt, $U(P) \leq A'$, und $\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} U(P) \leq A (A \leq A')$ in jedem Randpunkt Q von G ausser in endlich vielen isolierten Punkten Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und auf endlich vielen rektifizierbaren Kurven C_k ($k = 1, 2, \dots, n'$), so kann man folgern $U(P) \leq A$ in G . Diese Tatsache hängt damit zusammen, dass das Newtonsche Potential von Massen, die in Punkten und auf Kurven im Raum verteilt sind, in der Umgebung der erzeugenden Massen unbeschränkt gross wird. Der Beweis kann so geführt werden: Es bezeichne r_i den Abstand $\overline{Q_i P}$ und r den Abstand $\overline{QP}$, wo Q ein laufender Punkt auf C_k ist, ferner ds das Linienelement auf C_k . Dann ist

$$V(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} + \sum_{k=1}^{n'} \int_{C_k} \frac{ds}{r}$$

positiv harmonisch in G und strebt gegen Unendlich für $P \rightarrow Q_i$ und für $P \rightarrow Q$ (Q auf C_k). Für die in G harmonische Funktion $U_1(P) = U(P) - \varepsilon V(P)$ ($\varepsilon > 0$) gilt in jedem Randpunkt Q von G ohne Ausnahme $\overline{\lim}_{P \rightarrow Q} U_1(P) \leq A$. Nach dem nicht erweiterten Maximumprinzip ist somit $U_1(P) \leq A$ in G für jedes positive ε . Daher auch $U(P) \leq A$.

Naturgemäss stellt sich jetzt eine weitere Frage: Wie verhält sich $U(P)$ in der Umgebung der Randpunkte Q_i und der Randkurven C_k , wenn nicht verlangt wird, dass U beschränkt sei in G , während die übrigen Voraussetzungen nach wie vor gelten?

Im Falle von harmonischen Funktionen zweier Veränderlicher ¹⁾ ist dieses Problem Gegenstand des klassischen Satzes der analytischen Funktionentheorie von PHRAGMÉN und LINDELÖF ²⁾. Seit der Publikation der Phragmén-Lindelöfschen Arbeit haben sich verschiedene Autoren mit diesem Problem beschäftigt und dem Theorem schärfere Formulierungen verliehen, so vor allem die Herren F. u. R. NEVANLINNA ³⁾, R. NEVANLINNA ⁴⁾, L. AHLFORS ⁵⁾ und M. HEINS ⁶⁾. Das zugrundegelegte Gebiet ist dabei die Halbebene. Den Übergang zu allgemeineren Gebieten liefert eine konforme Abbildung des Gebietes (oder eines einfach zusammenhängenden Teiles desselben) auf die Halbebene unter Verwendung des Ahlfors'schen Verzerrungssatzes ⁷⁾.

Die vorliegende Arbeit hat zur Aufgabe, analoge Resultate zu gewinnen für harmonische Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen, und zwar anhand der Funktionen dreier Variabler. Die verwendeten Methoden lassen sich aber ohne Schwierigkeit auf Funktionen beliebig vieler Veränderlicher anwenden.

Wir haben oben gesehen, dass bei dreidimensionalen Problemen vom Phragmén-Lindelöfschen Typus neben »singulären« Randpunkten auch »singuläre« Randkurven auftreten können. Die Untersuchung der betrachteten Funktionen in der Umgebung solcher Kurven würde aber über den Rahmen dieser Publikation hinausgehen und ist daher beiseite gelassen worden.

Die Arbeit zerfällt in zwei methodisch gänzlich verschiedene Teile.

Im ersten Teil werden in Analogie zum klassischen Phragmén-Lindelöfschen Satze Funktionen $u(P)$ betrachtet, die in einem Halbraum D harmonisch sind und in der Umgebung der endlichen Punkte der Begrenzungsebene E einer Beschränktheitsbedingung unterliegen. Durch Konstruktion einer zweckmässig gewählten harmonischen Majorante von u in einer Halbkugel, deren Radius gegen Unendlich strebt, gewinnt man auf einfache Weise Ergebnisse, die den im Falle der Ebene bekannten völlig entsprechen.

¹⁾ Hier handelt es sich selbstverständlich nur um isolierte Punkte Q_i auf der Randkurve eines ebenen Gebietes.

²⁾ E. PHRAGMÉN und ERNST LINDELÖF, Acta Math., t. 31, (1908).

³⁾ F. u. R. NEVANLINNA, Acta Soc. sci. fenn., t. L. Nr. 5 (1922), pp. 16 — 19.

⁴⁾ R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin (1936), pp. 42 — 44.

⁵⁾ L. AHLFORS, Trans. Am. Math. Soc. 41, (1937).

⁶⁾ M. HEINS, Trans. Am. Math. Soc. 60, (1946).

⁷⁾ L. AHLFORS, Acta Soc. sci. fenn. N.s 1, Nr. 9, (1930).

Im zweiten Teil wird ein nichtbeschränktes beliebiges Gebiet G des xyz -Raumes zugrundegelegt, das nur sehr wenigen Einschränkungen unterliegt, und als Ausnahmepunkt der Punkt Unendlich gewählt. Die Hauptschwierigkeit liegt jetzt im notwendigen Verzicht auf die bei zweidimensionalen Problemen stets zur Verfügung stehende Möglichkeit der konformen Abbildung einfach zusammenhängender ebener Gebiete auf Normalgebiete (Kreisfläche, Halbebene, Parallelstreifen usw.). Es erweist sich daher als notwendig, ganz andere Methoden heranzuziehen. Als solche scheint sich vor allem eine im zweidimensionalen Fall erstmals von T. CARLEMAN¹⁾ verwendete zu eignen.

Betrachtet wird die Funktion $u^+ = \max(u, 0)$ auf den Schnittflächen T_z von G mit den Ebenen $z = \text{const.}$ Zum Gegenstand der Untersuchung wird die Hilfsfunktion $m(z) = \left(\iint_{T_z} u^+{}^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$ gemacht. Wenn durch eventuelle vorgängige Addition einer Konstanten dafür gesorgt wird, dass das Teilgebiet von G , in dem $u > 0$ ist, ausser im Punkt Unendlich nirgends bis an den Rand von G heranreicht, so läuft das Problem im wesentlichen darauf hinaus, das Doppelintegral

$$\iint_{T_z} \left[\left(\frac{\partial u^+}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

nach unten abzuschätzen, wodurch man auf die folgende Variationsaufgabe geführt wird: Es ist das Integral

$$\iint_{T_z} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \iint_T v^2 dx dy = 1$$

zu einem Minimum zu machen, wenn am Rande von T_z $v = 0$ angenommen wird. Die Lösung wird bekanntlich gegeben durch die gemäss der Nebenbedingung normierte erste Eigenfunktion der partiellen Differentialgleichung der schwingenden Membran

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^2 v = 0$$

für das Gebiet T_z . Der entsprechende kleinste Eigenwert λ^2 liefert dabei gerade den Minimalwert des in Frage stehenden Doppelintegrals.

Indem für jeden Wert von z der zugehörige Gebietsquerschnitt T_z (oder ein zusammenhängender Teil desselben) betrachtet wird, erscheint λ als Funktion von z ; und diese durch die Gestalt des dreidimensionalen Gebie-

¹⁾ TORSTEN CARLEMAN, C. R. Acad. Sci. Paris t. 196 (1933), pp. 995 — 997.

tes G bestimmte Funktion $\Lambda(z)$ ist massgebend für das Wachstum von $m(z)$, was darin zum Ausdruck kommt, dass $m(z)$ der Differentialungleichung

$$m''(z) \geq \Lambda(z)^2 m(z)$$

genügt.¹⁾ Diese Ungleichung wurde bereits durch CARLEMAN in der zitierten Arbeit publiziert²⁾.

Der Abschnitt A des zweiten Teiles der vorliegenden Arbeit ist der genauen Begründung der »CARLEMANSchen Differentialungleichung« für harmonische Funktionen von drei Variablen gewidmet, während im Abschnitt B versucht wird, die Ungleichung durch »asymptotische Integration« auszuwerten und Abschätzungen für das Wachstum von u für $z \rightarrow \infty$ zu erhalten. Exakte Resultate können indessen, wie in der Schlussbemerkung gezeigt wird, nach dieser Methode dann und nur dann erhalten werden, wenn G ein zylindrisches Gebiet ist, in welchem Falle Extremalfunktionen leicht angegeben werden können.

An dieser Stelle sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Mitglied der Finnischen Akademie, Herrn Prof. Dr. R. NEVANLINNA meinen tiefempfundenen Dank auszusprechen für die Anregung und die wertvollen Ratschläge, die er mir während der Ausführung dieser Arbeit hat zuteil werden lassen.

Erster Teil: Funktionen, die in einem Halbraum harmonisch sind.

1. *Die Poissonsche Integralformel.* Zur Beschreibung des vorliegenden dreidimensionalen Raumes verwenden wir gleichzeitig cartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 in Bezug auf ein gegebenes, festes Koordinatensystem und Polarkoordinaten r, φ_1, φ_2 , die durch die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

verknüpft seien.

¹⁾ Man vergleiche dazu meine Publikation: C. R. Acad. Sci. Paris, t. 228 (1949), pp. 887—888.

²⁾ Entsprechend der um Eins kleineren Dimensionszahl handelt es sich dort um das Eigenwertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda^2 v = 0$$

für ein Segment des geradlinigen Querschnittes eines ebenen Gebietes. Bezeichnet l die Länge des Segmentes, so wird, wie man sofort einsieht, $\lambda = \pi/l$.

In diesem Kapitel betrachten wir reelle Punktfunktionen $U(P) = U(x_1, x_2, x_3)$, die im Halbraum D $x_1 > 0$ oder in einem Teilgebiet D' von D harmonisch, d.h. zweimal stetig differenzierbar nach allen Variablen sind und der Laplaceschen Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0$$

genügen. Die Begrenzungsfläche $x_1 = 0$ von D bezeichnen wir fortan mit E .

In jedem Punkte $Q(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2)$ der Kugelfläche K_ϱ $r = \varrho$ sei $f(Q)$ als beschränkte, stückweise stetige Funktion vorgegeben. Dann stellt das Poissonsche Integral

$$(2) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_\varrho} f(Q) \frac{\varrho(\varrho^2 - r^2)}{s^3} d\Omega$$

die im Kugellinnern $r < \varrho$ beschränkte harmonische Funktion dar, für die in jedem Stetigkeitspunkt Q von $f(Q)$ gilt

$$\lim_{P \rightarrow Q} U(P) = f(Q)^1).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} s^2 &= \overline{QP}^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \gamma \\ \cos \gamma &= \cos \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 \cos (\varphi_2 - \vartheta_2) \\ d\Omega &= \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\vartheta_2. \end{aligned}$$

Um den Grenzübergang $\varrho \rightarrow \infty$ ausführen zu können, entwickeln wir den Kern des Poissonschen Integrales nach steigenden Potenzen von r/ϱ und erhalten

$$(3) \quad \varrho \frac{\varrho^2 - r^2}{s^3} = \frac{1 - \frac{r^2}{\varrho^2}}{\left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2} - 2 \frac{r}{\varrho} \cos \gamma\right)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(\cos \gamma) \frac{r^k}{\varrho^k};$$

dabei bezeichnet P_k das Legendresche Polynom der Ordnung k . Denken wir uns diese für $0 < r < r_0 < \varrho$, ϱ , $0 < \varphi_1 < \pi$; $0 < \varphi_2 < 2\pi$; $0 < \vartheta_1 < \pi$, $0 \leq \vartheta_2 \leq 2\pi$ in allen diesen Variablen gleichmässig konvergente Reihe in (2) eingesetzt, so ergibt gliedweise Integration über die Kugeloberfläche K_ϱ für das Poissonsche Integral die Entwicklung

¹⁾ Dies lässt sich in einfacher Weise direkt verifizieren. Man vergleiche den entsprechenden Existenzbeweis für die Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Halbraum in Nr. 5.

$$(4) \quad U(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \frac{r^k}{\varrho^k} \int_{K_\varrho} f(Q) P_k(\cos \gamma) d\Omega,$$

die in jeder Kugel $0 \leq r < r_0 < \varrho$ gleichmässig konvergiert.

Wir nehmen jetzt speziell an, dass $f(Q)$ in Punkten $Q(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2)$ und $Q^*(\varrho, \pi - \vartheta_1, \vartheta_2)$, die spiegelbildlich zur Ebene E liegen, entgegengesetzt gleiche Werte annehme. Es sei also $f(Q^*) = -f(Q)$. Setzt man

$$\cos \gamma^* = -\cos \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_2 - \vartheta_2),$$

so entsteht aus (4) die Reihe

$$(5) \quad U(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \frac{r^k}{\varrho^k} \int_{H_\varrho} f(Q) \left[P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) \right] d\Omega$$

wobei die hier auftretenden Integrale nur über die Halbkugeloberfläche H_ϱ $r = \varrho, x_1 > 0$ zu erstrecken sind. Der Term $k = 0$ fällt weg, da $P_0 = 1$. Ferner zeigt eine kurze Überlegung, dass für $k \geq 1$

$$(6) \quad P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) = 2 \cos \varphi_1 \cos \vartheta_1 a_{k-1}(\cos \gamma, \cos \gamma^*),$$

wo a_{k-1} ein Polynom vom Grade $k-1$ in $\cos \gamma$ und $\cos \gamma^*$ ist. Es ist

$$(7) \quad \left| a_{k-1}(\cos \gamma, \cos \gamma^*) \right| \leq \frac{k(k+1)}{2}, \quad a_0 = 1.$$

Diese obere Schranke für a_{k-1} ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass

$$\left| \frac{dP_k(\cos \gamma)}{d(\cos \gamma)} \right| \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

für reelles γ .

2. *Das harmonische Mass.* Sei G ein räumliches Gebiet, das den Punkt Unendlich nicht im Innern enthält. Der Rand Γ von G setze sich aus endlich vielen glatten Flächenstücken zusammen. Ist dann B eine aus endlich vielen Stücken von Γ zusammengesetzte Punktmenge, deren Rand aus endlich vielen glatten Kurvenbogen besteht, so nennen wir $\omega(P, B, G)$ das harmonische Mass von B bezüglich G , wenn es als Funktion des Aufpunktes P den folgenden Bedingungen genügt:

- 1) $\omega(P, B, G)$ ist harmonisch und beschränkt im Innern von G ;
- 2) $\lim_{P \rightarrow Q} \omega(P, B, G) = 1$ für jeden inneren Punkt Q von B ;
- 3) $\lim_{P \rightarrow Q} \omega(P, B, G) = 0$ für jeden inneren Punkt Q der komplementären Randpunktmenge $\Gamma - B$.

Nach dem erweiterten Maximumprinzip ¹⁾ ist $\omega(P, B, G)$ durch die Forderungen 1), 2) und 3) eindeutig bestimmt. Seine Existenz lässt sich für die einfachen Konfigurationen von G , für die es hier Anwendung findet, leicht verifizieren. ²⁾

Als Gebiet legen wir jetzt die Halbkugel D_ϱ $r < \varrho, x_1 > 0$ zugrunde, deren Oberfläche aus der abgeschlossenen Kreisscheibe E_ϱ $r < \varrho, x_1 = 0$ und der offenen Halbkugeloberfläche H_ϱ $r = \varrho, x_1 > 0$ besteht. Das harmonische Mass $\omega(P, H_\varrho, D_\varrho)$, das wir im folgenden kurz mit $\omega_\varrho(P)$ bezeichnen, lässt sich als Poissonsches Integral über die volle Kugeloberfläche K_ϱ ausdrücken. Setzen wir nämlich

$$f(Q) = \begin{cases} +1 & \text{auf } H_\varrho \\ -1 & \text{auf } H_\varrho^* (r = \varrho, x_1 < 0) \end{cases},$$

so liefert die Formel (2) die für $r < \varrho$ beschränkte harmonische Funktion, die auf H_ϱ den Randwert 1, auf H_ϱ^* den Randwert -1 besitzt und daher in allen inneren Punkten von E_ϱ verschwindet. Unter Verwendung der Formel (5) können wir somit schreiben

$$(8) \quad \omega_\varrho(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \frac{r^k}{\varrho^k} \int_{H_\varrho} \left[P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) \right] d\Omega.$$

Indem wir die Beziehung (6) berücksichtigen und zugleich den ersten Term der Reihe (8) separieren erhalten wir

$$\omega_\varrho(P) = \frac{3}{2} x_1 \frac{1}{\varrho} + \frac{x_1}{2\pi} \frac{1}{\varrho} \sum_{k=2}^{\infty} (2k+1) \frac{r^{k-1}}{\varrho^{k-1}} \int_{H_\varrho} a_{k-1} \cos \vartheta_1 d\Omega.$$

Wir multiplizieren mit ϱ und führen den Grenzübergang $\varrho \rightarrow \infty$ aus. Da für jedes a_{k-1} die Beschränktheitsbeziehung (7) besteht, strebt der zweite Summand gleichmässig in jedem beschränkten Teilgebiet D' von D gegen Null. Damit ist die Beziehung gewonnen

$$(9) \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho \cdot \omega_\varrho(P) = \frac{3}{2} x_1.$$

Die Einführung des harmonischen Masses erlaubt uns auch, eine beschränkte harmonische Funktion auf einfache Weise durch ihre Randwerte darzustellen. Z.B. seien die Randwerte der in D_ϱ beschränkten harmonischen Funktion gleich $f(Q)$ auf H_ϱ und gleich Null in jedem inneren

¹⁾ Siehe Einleitung.

²⁾ Existenzbeweis des harmonischen Masses für den Halbraum in Nr. 5.

Punkte von E_ϱ . Dann wird $U(P)$ durch (5) dargestellt. Ein Vergleich mit (8) zeigt aber die Möglichkeit, kurz zu schreiben

$$(10) \quad U(P) = \int_{H^0} f(Q) d\omega_\varrho(P, Q)$$

unter Verwendung des Differentials

$$(11) \quad d\omega_\varrho(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \left[P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) \right] \frac{r^k}{\varrho^k} d\Omega$$

des harmonischen Masses. Unter Berücksichtigung von (6) und (7) ergibt eine einfache Rechnung die für $\varrho \rightarrow \infty$ wichtige Abschätzung

$$(11') \quad d\omega_\varrho(P, Q) = \frac{3}{2\pi} \frac{x_1}{\varrho} \cos \vartheta_1 \left[1 + q \left(\frac{r}{\varrho} ; \varphi_1, \varphi_2 ; \vartheta_1, \vartheta_2 \right) \right] d\Omega,$$

wo $q \left(\frac{r}{\varrho} ; \varphi_1, \varphi_2 ; \vartheta_1, \vartheta_2 \right) \rightarrow 0$ für $\frac{r}{\varrho} \rightarrow 0$, gleichmässig in den übrigen Variablen.

3. *Der PHRAGMÉN-LINDELÖFSche Satz für den Halbraum.* In Analogie zu den Voraussetzungen des klassischen Satzes der analytischen Funktionentheorie von PHRAGMÉN und LINDELÖF¹⁾ unterwerfen wir jetzt die Funktion $u(P)$ den folgenden Bedingungen:

- 1) $u(P)$ sei regulär harmonisch im Halbraum D ;
- 2) $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq 0$ für jeden endlichen Punkt Q der Ebene E .

Die folgende Formulierung des Theorems stammt für Funktionen von zwei Variablen von den Herren F. und R. NEVANLINNA²⁾ und wurde später auf anderem Wege von Herrn AHLFORS³⁾ auch für Funktionen beliebig vieler Veränderlicher hergeleitet.

Wir führen die Bezeichnung ein

$$u^+ = \max(u, 0), \bar{u} = -\min(u, 0) \text{ sodass } u = u^+ - \bar{u}.$$

Nach dem erweiterten Maximumprinzip gilt in der Halbkugel D_ϱ die Abschätzung

¹⁾ E. PHRAGMÉN und ERNST LINDELÖF, loc. cit.

²⁾ F. und R. NEVANLINNA, loc. cit., pp. 16—19.

³⁾ L. AHLFORS, On PHRAGMÉN-LINDELÖF's Principle; Trans. Am. Math. Soc. 41 (1937).

$$u(P) \leq \int_{H_\varrho} u(Q) d\omega_\varrho(P, Q) \leq \int_{H_\varrho}^+ u(Q) d\omega_\varrho(P, Q)$$

und wegen (11')

$$u(P) \leq \frac{3}{2\pi} x_1 \left[1 + \varepsilon\left(\frac{r}{\varrho}\right) \right] \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega;$$

dabei ist $\varepsilon(r/\varrho)$ eine Grösse, die mit r/ϱ gegen Null strebt. Ein Satz von AHLFORS ¹⁾ besagt, dass

$$\frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega$$

eine monoton nicht abnehmende Funktion von ϱ ist und daher einen endlichen oder unendlichen Grenzwert η besitzt für $\varrho \rightarrow \infty$. Falls η endlich ist, so folgt aus der letzten Abschätzung

$$(12) \quad u(P) < \frac{3}{2\pi} \eta x_1 \quad \text{in } D.$$

Wie man sich sofort überzeugt, kann der Koeffizient von x_1 in (12) durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.

In seiner ursprünglichen Fassung ist der Phragmén — Lindelöfsche Satz eine Aussage über das Verhalten von

$$M(\varrho) = \sup_{H_\varrho} u(P).$$

Jetzt erhält man mit Hilfe des harmonischen Masses $\omega_\varrho(P)$ in D_ϱ die harmonische Majorante $M(\varrho) \omega_\varrho(P)$ ²⁾. Daraus folgt unter Berücksichtigung von (9) die im ganzen Halbraum D bestehende Ungleichung

$$u(P) \leq \frac{3}{2} \alpha x_1 \quad \text{mit} \quad \alpha = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{M(\varrho)}{\varrho}.$$

Für harmonische Funktionen von zwei Variablen bewies M. HEINS ³⁾, dass der Grenzwert von $M(r)/r$ für $r \rightarrow \infty$ existiert und nichtnegativ ist. Der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeit von der Ebene auf den Raum übertragen, was im folgenden in aller Kürze durchgeführt werden soll.

¹⁾ L. AHLFORS, loc. cit.

²⁾ R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, pp. 42 — 44.

³⁾ MAURICE HEINS, On the PHRAGMÉN — LINDELÖF Principle, Trans. Am. Math. Soc. 60 (1946).

Hilfssatz: Sei $v(P) < 0$ eine in D harmonische Funktion und $B(\varrho, \varepsilon)$ die Punktmenge auf H_ϱ , wo

$$v(P) \leq -\varepsilon \varrho.$$

Falls dann für ein $\varepsilon > 0$ $\overline{\lim}_{\varrho \rightarrow \infty} \text{Mass } B(\varrho, \varepsilon) > 0$, so existiert eine positive Konstante μ , sodass

$$(a) \quad v(P) \leq -\mu x_1 \text{ in } D^1)$$

Beweis: Offenbar gilt in D die Ungleichung

$$v(P) \leq -\varepsilon \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho \omega(P, B(\varrho, \varepsilon), D_\varrho).$$

Unter Berücksichtigung von (11') ist aber

$$\overline{\lim}_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho \cdot \omega(P, B(\varrho, \varepsilon), D_\varrho) = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho \cdot \int_{B(\varrho, \varepsilon)} d\omega_\varrho(P, B) = \frac{3}{2\pi} x_1 \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{B(\varrho, \varepsilon)} \cos \vartheta_1 d\Omega.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes.

Es sind nun vier Fälle zu unterscheiden:

- I. $\alpha = \infty$. Dann ist $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} M(\varrho)/\varrho = \infty$.
 II. $0 < \alpha < \infty$. Auch jetzt existiert $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} M(\varrho)/\varrho = \alpha$, und es ist $u(P) \leq \alpha x_1$ in D . Um dies zu zeigen, wählen wir die positive Konstante k so, dass $u = kx_1 + v$, wo $v < 0$ und keiner Beziehung (a) mit positivem μ genügt. Wegen der letzten Ungleichung auf Seite 15 ist dann $\alpha \leq k < \frac{3}{2} \alpha$. Es ist somit

$$\frac{M(r)}{r} \geq k \cos \varphi_1 + \frac{v}{r}.$$

Es existiert daher eine Folge $r_i (i = 1, 2, \dots)$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty$, sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v}{r_i} < \alpha - k \cos \varphi_1$$

für jedes feste φ_1 . Wäre nun $k > \alpha$, so liesse sich ein $\Phi (0 < \Phi)$ und ein $\varepsilon > 0$ angeben, sodass

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{v}{r_i} < -\varepsilon \text{ für } 0 \leq \varphi_1 = \text{const} < \Phi.$$

¹⁾ Gemeint ist natürlich das zweidimensionale Mass.

Nach dem Hilfssatz würde v einer Beziehung (a) mit positivem μ unterliegen, im Widerspruch zur Annahme. Es ist daher $k = \alpha$ und $u(P) < \alpha x_1$. Also ist auch $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r)/r = \alpha$.

III. $\alpha = 0$. Es folgt sofort $u(P) \leq 0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r)/r = 0$.

IV. $-\infty < \alpha < 0$. Diese Annahme ist zu verwerfen. Setzen wir nämlich $u = -kx_1 + v$, wo $v \leq 0$ und keiner Beziehung (a) mit positivem μ genügt ($k \geq 0$), so folgt, wie im Fall II die Existenz einer Folge von Radien r_i ($i = 1, 2, \dots$) mit $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty$, sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v}{r_i} \leq \alpha + k \cos \varphi_1$$

für jedes konstante φ_1 . Daher existiert ein Φ ($\Phi < \frac{\pi}{2}$) und ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v}{r_i} \leq -\varepsilon \text{ für } \varphi_1 = \text{const.} \geq \Phi,$$

was wie oben zum Widerspruch mit den Annahmen führt.

Falls $\alpha < \infty$ hat man demnach die Darstellung $u(P) = kx_1 + v(P)$. Dabei ist $k = \alpha$, und $v(P)$ ist nichtpositiv und genügt keiner Beziehung (a) mit positivem μ ¹⁾. Daraus ergibt sich unabhängig vom AHLFÖRSschen Beweis die Existenz des Grenzwertes η . Es ist nämlich

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho} v(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega = 0,$$

da eine gegenteilige Annahme mit den Eigenschaften von $v(P)$ unvereinbar wäre, wie man auf Grund des oben bewiesenen Hilfssatzes sofort einsieht. Da ferner $\alpha x_1 \geq u \geq \alpha x_1 + v$, so folgt $\eta = \frac{2\pi}{3} \alpha$.

Satz: Unter den Voraussetzungen 1) und 2) existieren die nichtnegativen Grenzwerte

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r} \text{ und } \eta = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho} u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega = \frac{2\pi}{3} \alpha,$$

und, falls sie endlich sind, so ist

$$(13) \quad u(P) \leq \alpha x_1 \text{ in } D.$$

¹⁾ Man vergleiche: Mme JACQUELINE LELONG, C. R. Acad. Sci. Paris, 226 (1948), p. 1333.

Anstelle des Punktes Unendlich soll jetzt ein endlicher Randpunkt des Halbraumes D ausgezeichnet werden, indem wir die Voraussetzung 2) ersetzen durch

2') $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) < 0$ für jeden Punkt Q der Ebene E (den Punkt Unendlich inbegriffen) mit Ausnahme des Nullpunktes 0 .

Diesen Fall führen wir auf den bereits behandelten zurück durch eine Inversion des Raumes an der Einheitskugel um den Ursprung 0 . Seien P und P' zwei Punkte, die sich dabei gegenseitig entsprechen. Zwischen ihren Koordinaten $x_i (i = 1, 2, 3)$ bzw. r, φ_1, φ_2 einerseits und x_i' bzw. $r', \varphi_1', \varphi_2'$ andererseits bestehen dann die bekannten Beziehungen

$$(14) \quad x = \frac{x_i'}{r'^2}, \quad r r' = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_1', \quad \varphi_2 = \varphi_2'.$$

Der Halbraum D transformiert sich in sich selbst.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass für die Funktion

$$u'(P') = r u(P)^1),$$

als Funktion von P' betrachtet, die früheren Voraussetzungen 1) und 2) erfüllt sind. Indem wir den Satz von Seite 17 auf $u'(P')$ anwenden erhalten wir den

Satz: Genügt $u(P)$ den Voraussetzungen 1) und 2'), so existieren die nichtnegativen Grenzwerte

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} M(r) r^2 \text{ und } \eta = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^2 \int_{H_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega, \quad \eta = \frac{2\pi}{3} \alpha,$$

und es gilt, falls sie endlich sind,

$$(15) \quad u(P) \leq \alpha \frac{x_1}{r^3} \text{ in } D^2).$$

4. *Funktionen, die auf E verschwinden.* Für spätere Anwendungen stellen wir in dieser Nr. kurz die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $g(P)$ zusammen, die den folgenden Bedingungen genügen:

1) Im Raume von n Dimensionen müsste es heissen $u'(P') = r^{n-2} u(P)$.

2) Für Funktionen von n Variablen ist zu setzen

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} M(r) r^{n-1}, \quad \eta = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{n-1} \int_{H_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega, \quad u(P) \leq \alpha \frac{x_1}{r^n}.$$

- 1) $g(P)$ ist regulär harmonisch in D ;
- 2) $\lim_{P \rightarrow Q} g(P) = 0$ für jeden endlichen Punkt Q von E .

$g(P)$ lässt sich zu einer im ganzen endlichen Raum harmonischen Funktion erweitern, indem man setzt $g(P^*) = -g(P)$, wenn P und P^* symmetrisch zur Ebene E liegen. Bekanntlich kann $g(P)$ in eine im ganzen Raum konvergente Reihe

$$(16) \quad g(P) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(P)$$

entwickelt werden, deren allgemeines Glied $h_k(P)$ ein homogenes harmonisches Polynom vom Grade k in x_1, x_2, x_3 ist¹⁾, das selbst in jedem endlichen Punkte von E verschwindet, und daher die Form hat²⁾

$$(16') \quad h_k(P) = c_{k-1}(x_2, x_3)x_1 - \frac{1}{3!} \Delta c_{k-1}(x_2, x_3)x_1^3 + \frac{1}{5!} \Delta \Delta c_{k-1}(x_2, x_3)x_1^5 - \dots$$

wo $c_{k-1}(x_2, x_3)$ ein homogenes Polynom in x_2, x_3 vom Grade $k-1$ ist. Es gibt also genau k linear unabhängige Funktionen $h_k(P)$. So hat man z.B. für $k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} h_1(P) &= ax_1, \quad h_2(P) = ax_1x_2 + bx_1x_3 \\ h_3(P) &= (ax_2^2 + bx_2x_3 + cx_3^2)x_1 - \frac{1}{3}(a+c)x_1^3. \end{aligned}$$

Auf die Funktionen $g(P)$ lässt sich die Formel (5) anwenden. Ein Vergleich mit (16) zeigt sofort, dass in D

$$(16'') \quad h_k(P) = \frac{2k+1}{4\pi} \frac{r^k}{\varrho^k} \int_{H_Q} g(Q) \left[P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) \right] d\Omega.$$

Aus der Tatsache, dass für $g(P)$ nur eine Darstellung der Form (16) möglich ist, folgt, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho^k} \int_{H_Q} g(Q) \left[P_k(\cos \gamma) - P_k(\cos \gamma^*) \right] d\Omega$$

von ϱ unabhängig ist. Insbesondere ergibt sich für $k = 1$ die Konstanz von

$$(17) \quad \sigma = \frac{1}{\varrho} \int_{H_Q} g(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega.$$

¹⁾ O. D. KELLOGG, Foundations of Potential Theory, Berlin (1929), pp. 251 — 253, sowie pp. 139 — 141.

²⁾ O. D. KELLOGG, loc. cit., pp. 139 — 141.

Es ist dann

$$(17') \quad h_1(P) = \frac{3}{2\pi} \sigma x_1.$$

Zum Schluss beweisen wir noch den

Hilfssatz: *Der Ausdruck*

$$(18) \quad \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho} |g(Q)| \cos \vartheta_1 d\Omega$$

strebt entweder gegen $+\infty$ für $\varrho \rightarrow \infty$ oder dann ist er konstant gleich $|\sigma|$. Letzteres trifft dann und nur dann zu, wenn $g(P) = h_1(P)$ ist.

Beweis: Aus (16'') folgt für $h_k(P)$ die in D_ϱ gültige Abschätzung

$$|h_k(P)| \leq \frac{r^k}{\varrho^{k-1}} \cos \varphi_1 \frac{k(k+1)(2k+1)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho} |g(Q)| \cos \vartheta_1 d\Omega,$$

die sich unter Berücksichtigung von (6) und (7) durch kurze Rechnung ergibt. Wir schliessen daraus, dass $h_k(P) = 0$ für $k > 1$, wenn der Ausdruck (18) beschränkt ist. Dann ist aber $g(P) = h_1(P)$ entweder durchweg positiv oder durchweg negativ (oder identisch Null) in D , die Ausdrücke (17) und (18) also entweder gleich oder entgegengesetzt gleich.

Zugleich folgt noch, dass auch umgekehrt jede Funktion $g(P)$, die in D einseitig beschränkt, d.h. von einerlei Vorzeichen ist, die Form hat $g(P) = ax_1$; denn es ist evident, dass jetzt der Ausdruck (18) den konstanten Wert $|\sigma|$ hat.

5. *Die erste Randwertaufgabe für den Halbraum.* Es soll zu einer beliebig vorgegebenen, in allen endlichen Punkten Q der Ebene E definierten Funktion $f(Q)$ eine in D harmonische Funktion $V(P)$ gefunden werden, die auf E die Randwerte $f(Q)$ besitzt. Dabei setzen wir voraus:

- 1) $f(Q)$ ist stückweise stetig;
- 2) das Doppelintegral

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} |f(t, \vartheta)| d\vartheta$$

konvergiert. Dabei sind t und ϑ die Polarkoordinaten von Q ¹⁾.

¹⁾ Gemeint sind natürlich ebene Polarkoordinaten in der Ebene E . Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, dass t und ϑ mit den räumlichen Polarkoordinaten ϱ und ϑ_2 von Q übereinstimmen ($\vartheta_1 = \frac{1}{2}\pi$).

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) existiert eine Schar von Funktionen $V(P)$, die im Halbraum D regulär harmonisch sind und für die in jedem inneren Punkt Q eines Stetigkeitsbereiches von $f(Q)$ gilt $\lim_{P \rightarrow Q} V(P) = f(Q)$.

Nach den Ausführungen von Nr. 4 ist es evident, dass $V(P)$ durch die Randwerte $f(Q)$ nur bis auf eine additive Funktion $g(P)$ der Form (16) bestimmt ist und, andererseits die Differenz zweier Funktionen $V(P)$ der Lösungsschar auch immer die Form (16) aufweist. Die allgemeine Lösung der Randwertaufgabe hat daher die Gestalt

$$(19) \quad V(P) = V_0(P) + g(P).$$

Dabei kann, wie wir zeigen werden, $V_0(P)$ so gewählt werden, dass

$$(19') \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{V_0(P)}{x_1} = 0$$

gleichmäßig in jedem Kegel $0 \leq \varphi_1 \leq \Phi < \frac{\pi}{2}$.

Den Beweis führen wir in drei Schritten:

a) Die Funktion $x_1 s^{-3}$ ($s = QP$) ist für festes Q eine harmonische Funktion von P , die regulär ist im ganzen Raum mit Ausnahme von $P = Q$. Q variere nun auf einem Teilbereich E' von E ($E = E' + E''$). Bezeichnet $d\sigma$ das Flächenelement auf E , so stellt das Integral

$$\psi(P, E') = \frac{1}{2\pi} x_1 \int_{E'} \frac{d\sigma}{s^3}$$

eine Funktion dar, die harmonisch ist in jedem beschränkten Raumgebiet G , das keinen Punkt von E' enthält. Ferner verschwindet $\psi(P, E')$ in jedem inneren Punkt der komplementären Punktmenge E'' . Eine kurze Rechnung lehrt, dass

$$\psi(P, E) = \psi(P, E') + \psi(P, E'') = 1$$

wenn P im Halbraum D liegt¹⁾. Sei Q ein innerer Punkt von E' . Dann ist $\lim_{P \rightarrow Q} \psi(P, E'') = 0$. Wenn wir P auf den Halbraum D beschränken, ist daher $\lim_{P \rightarrow Q} \psi(P, E') = 1 - \lim_{P \rightarrow Q} \psi(P, E'') = 1$.

Damit hat sich $\psi(P, E')$ als das harmonische Mass $\omega(P, E', D)$ der Randpunktmenge E' in Bezug auf den Halbraum D erwiesen, und wir können schreiben

1) Wenn P im Halbraum $x_1 < 0$ liegt, so ist $\psi(P, E) = -1$.

$$(20) \quad \omega(P, E', D) = \frac{1}{2\pi} x_1 \int_{E'} \frac{d\sigma}{s^3}$$

bzw.

$$(20') \quad d\omega(P, Q, D) = \frac{1}{2\pi} x_1 \frac{d\sigma}{s^3}.$$

b) Die Funktion

$$F(P) = \int_E f(Q) d\omega(P, Q, D) = x_1 \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t, \vartheta) d\vartheta}{\left[1 + \frac{r^2}{t^2} - 2 \frac{r}{t} \sin \varphi_1 \cos(\vartheta - \varphi_2)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ist in D harmonisch. Sei Q_1 ein Punkt von E , in dem $f(Q)$ stetig ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Umgebung Δ_ε auf E um Q_1 , sodass

$$|f(Q) - f(Q_1)| < \varepsilon \quad Q \text{ in } \Delta_\varepsilon.$$

Wir betrachten die Differenz

$$F(P) - f(Q_1) = \frac{x_1}{2\pi} \int_{\Delta_\varepsilon} [f(Q) - f(Q_1)] \frac{d\sigma}{s^3} + \frac{x_1}{2\pi} \int_{E - \Delta_\varepsilon} [f(Q) - f(Q_1)] \frac{d\sigma}{s^3},$$

wo $E - \Delta_\varepsilon$ die komplementäre Punktmenge von Δ_ε auf E ist. Es gilt somit die Abschätzung

$$|F(P) - f(Q_1)| < \varepsilon \frac{x_1}{2\pi} \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{d\sigma}{s^3} + \frac{x_1}{2\pi} \int_{E - \Delta_\varepsilon} |f(Q) - f(Q_1)| \frac{d\sigma}{s^3}.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite dieser letzten Ungleichung darf gemäss der Beziehung (20) in der Form $\varepsilon \cdot \omega(P, \Delta_\varepsilon, D)$ geschrieben werden; er strebt also gegen ε , wenn P sich einem inneren Punkt Q von Δ_ε aus dem Halbraum D beliebig nähert, während der zweite Summand dabei gegen Null konvergiert. Da jedenfalls Q_1 ein innerer Punkt von Δ_ε ist, hat man

$$\lim_{P \rightarrow Q} |F(P) - f(Q_1)| < \varepsilon$$

für jedes positive ε . Somit $\lim_{P \rightarrow Q} F(P) = f(Q_1)$. Damit ist die Existenz der Lösungsschar (19) nachgewiesen.

c) $F(P)$ ist mit $V_0(P)$ identisch. Um dies zu zeigen, gehen wir davon aus, dass

$$\left| \frac{F(P)}{x_1} \right| \leq \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(t, \vartheta)| d\vartheta}{\left(1 + \frac{r^2}{t^2} - 2 \frac{r}{t} \sin \varphi_1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Doppelintegral auf der rechten Seite der letzten Ungleichung existiert nach Voraussetzung 2) und ist eine Funktion von r und φ_1 allein. Sie strebt, wie man sofort einsieht, für $r \rightarrow \infty$ und $0 < \varphi_1 \leq \Phi < \pi/2$ gleichmässig in φ_1 gegen Null.

Somit haben wir für $V_0(P)$ die Darstellung

$$(21) \quad V_0(P) = \frac{1}{2\pi} x_1 \int_E f(Q) \frac{d\sigma}{s^3}$$

durch die auf E vorgegebenen Randwerte $f(Q)$.

Im folgenden wird es wichtig sein zu wissen, dass

$$(19'') \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{H_\varrho} |V_0(Q)| \cos \vartheta_1 d\Omega = 0.$$

Zum Beweise führen wir die in D nichtnegative harmonische Funktion

$$V_0^*(P) = \frac{x_1}{2\pi} \int_E |f(Q)| \frac{d\sigma}{s^3}$$

mit den Randwerten $|f(Q)|$ ein, die natürlich ebenfalls die Eigenschaft (19') besitzt. Nun ist überall in D $|V_0(P)| < V_0^*(P)$. Es genügt deshalb, die Beziehung (19'') für die Funktion V_0^* nachzuweisen. Sei p der Wert der linken Seite von (19''). Da die Randwerte von V_0^* auf E nichtnegativ sind, lässt sich $V_0^*(P)$ in der Halbkugel D_ϱ wie folgt abschätzen

$$V_0^*(P) > \int_{H_\varrho} V_0^*(Q) d\omega_\varrho(P, Q).$$

Für $\varrho \rightarrow \infty$ folgt daraus mit Rücksicht auf (11') die im ganzen Halbraum D gültige Ungleichung

$$V_0^*(P) > \frac{3}{2\pi} p x_1.$$

$p > 0$ stände im Widerspruch zu (19').

6. Eine Verallgemeinerung des Satzes von PHRAGMÉN und LINDELÖF.¹⁾
Die Funktion $u(P)$ genüge den folgenden Voraussetzungen:

¹⁾ Man vergleiche: F. und R. NEVANLINNA, loc. cit., pp. 21 — 23.

- 1) $u(P)$ ist regulär harmonisch in D ;
- 2) $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq A(Q)$ in jedem endlichen Punkt Q von E .

Dabei sei $A(Q) = A(t, \vartheta)$ stückweise stetig auf E und es existiere das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} |A(t, \vartheta)| d\vartheta.$$

Wir bilden, der Formel (21) entsprechend, die in D harmonische Funktion

$$V_0(P) = \frac{x_1}{2\pi} \int_E A(Q) \frac{d\sigma}{s^3}$$

mit den Randwerten $A(Q)$ und setzen $U(P) = u(P) - V_0(P)$. Es ist dann $\lim_{P \rightarrow Q} U(P) \leq 0$. Sei nun

$$\eta = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{\dot{H}_\varrho}^+ U(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega,$$

so ist nach dem Satz S. 15 $U(P) \leq \frac{3}{2\pi} \eta x_1$ in D . Nun ist aber

$$U - |V_0| \leq u \leq U + |V_0|.$$

Daraus folgt, da $V_0(P)$ der Beziehung (19'') unterliegt,

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{\dot{H}_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{\dot{H}_\varrho}^+ U(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega = \eta.$$

Somit gilt der

Satz: Wenn $u(P)$ den Bedingungen 1) und 2) dieser Nr. genügt, so existiert der Grenzwert

$$\eta = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{\dot{H}_\varrho}^+ u(Q) \cos \vartheta_1 d\Omega$$

und es ist

$$(22) \quad u(P) \leq \frac{x_1}{2\pi} \int_E A(Q) \frac{d\sigma}{s^3} + \frac{3}{2\pi} \eta x_1 \text{ in } D.$$

7. *Randwerte von u zwischen zwei Grenzen.* Wir haben in Nr. 6 das PHRAGMÉN — LINDELÖFSche Theorem insofern verallgemeinert, als wir für die Randwerte von $u(P)$ eine auf E definierte obere Schranke $A(Q)$ postulierten. Zum Schluss wollen wir jetzt noch annehmen, dass die Randwerte von u nicht nur nach oben sondern beidseitig durch eine vorgegebene Randfunktion beschränkt seien. Wir fordern daher

- 1) $u(P)$ sei harmonisch in D ;
- 2) $\overline{\lim_{P \rightarrow Q}} |u(P)| < A(Q)$ für jeden endlichen Punkt von E .

Dabei sei $A(Q) = A(t, \vartheta)$ eine nichtnegative, stückweise stetige Funktion auf E , für die das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} A(t, \vartheta) d\vartheta$$

konvergiert.

Wir setzen

$$V_0(P) = \frac{x_1}{2\pi} \int_E A(Q) \frac{d\sigma}{s^3}$$

und führen eine in der Halbkugel D_σ harmonische Hilfsfunktion in der folgenden Weise ein:

$$u_\sigma(P) = u(P) - \int_{H_\sigma} u(Q) d\omega_\sigma(P, Q) + \int_{H_\sigma} V_0(Q) d\omega_\sigma(P, Q).$$

Daraus ersieht man unmittelbar, dass sich das Verhalten von $u_\sigma(P)$ am Rande der Halbkugel D_σ durch die beiden folgenden Limes-Gleichungen ausdrücken lässt

- (a) $\lim_{P \rightarrow Q} u_\sigma(P) = V_0(Q)$ wenn Q innerer Punkt der Halbkugelfläche H_σ ist;
- (b) $\lim_{P \rightarrow Q} [u_\sigma(P) - u(P)] = 0$ wenn Q innerer Punkt der Kreisscheibe E_σ ist.

Daraus folgt nach dem Maximumprinzip

$$(c) \quad |u_\sigma(P)| \leq V_0(P) \text{ in } D.$$

Wir denken uns nun für jeden positiven Wert von ϱ die Funktion $u_\varrho(P)$ gebildet. Sei $\varrho_1 < \varrho_2$, dann sind in D_{ϱ_1} u_{ϱ_1} und u_{ϱ_2} definiert, und es ist für einen inneren Punkt Q von H_{ϱ_1}

$$\lim_{P \rightarrow Q} u_{\varrho_1} = V_0(Q) \quad (a) ; \quad \lim_{P \rightarrow Q} u_{\varrho_2}(P) \leq V_0(Q) \quad (c)$$

für einen inneren Punkt Q von E_{ϱ_1}

$$\lim_{P \rightarrow Q} [u_{\varrho_1}(P) - u_{\varrho_2}(P)] = 0 \quad (b) .$$

Nach dem erweiterten Maximumprinzip gilt somit in D_{ϱ_1} die Ungleichung

$$(d) \quad u_{\varrho_2}(P) \leq u_{\varrho_1}(P) .$$

Sei G ein beliebiges beschränktes Teilgebiet des Halbraumes D . Es existiert dann ein ϱ_0 , sodass für $\varrho > \varrho_0$ G in D_ϱ liegt. Die einparametrische Funktionenschar $u_\varrho(P)$ ist für $\varrho > \varrho_0$ in G harmonisch, gleichässig beschränkt (c) und nicht zunehmend (d). Nach dem Harnackschen Prinzip konvergiert $u_\varrho(P)$ gleichmässig in G gegen eine Grenzfunktion $u_0(P)$, die harmonisch und beschränkt ist in G . Es ist evident, dass $u_0(P)$ nicht von der Wahl des Gebietes G abhängt, sondern im ganzen Halbraum D definiert und harmonisch ist. Die Eigenschaften (b) und (c) übertragen sich natürlich auf $u_0(P)$, sodass wir die Beziehungen haben

$$(23) \quad \lim_{P \rightarrow Q} [u_0(P) - u(P)] = 0$$

für jeden endlichen Punkt Q der Ebene E , und

$$(24) \quad |u_0(P)| \leq V_0(P) \text{ in } D .$$

Aus (24) folgen unter Berücksichtigung von (19') und (19'') zwei entsprechende Beziehungen, die das Verhalten von u_0 in der Umgebung des Punktes Unendlich charakterisieren; nämlich

$$(24') \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{u_0(P)}{x_1} = 0$$

gleichmässig in jedem Kegel $0 \leq \varphi_1 \leq \Phi < \frac{\pi}{2}$, und

$$(24'') \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho} \int_{\dot{H}_\varrho} |u_0(Q)| \cos \vartheta_1 d\Omega = 0 .$$

Obschon nicht vorausgesetzt wurde, dass $u(P)$ auf E wohlbestimmte Randwerte besitze, ist es durch die Einführung der Funktionenschar $u_\varrho(P)$ gelungen, von u eine Funktion u_0 abzuspalten, so dass die Differenz $u - u_0$ auf E verschwindet, während $|u_0|$ ein im Sinne der Beziehungen (24') und (24'') möglichst schwaches Ansteigen gegen den Punkt Unendlich aufweist. Die Differenz $u - u_0$ genügt den Voraussetzungen von Nr. 4, ist also eine Funktion $g(P)$ der Form (16).

Satz: Erfüllt $u(P)$ die Voraussetzungen 1) und 2) dieser Nr., dann hat es die Form

$$(25) \quad u(P) = u_0(P) + g(P).$$

Dabei ist

$$|u_0(P)| \leq \frac{x_1}{2\pi} \int_E A(Q) \frac{d\sigma}{s^3}$$

und $g(P)$ eine ganze harmonische Funktion, die auf E verschwindet.

Indem wir den Hilfssatz von Nr. 4 verwenden und zugleich die Relation (24'') berücksichtigen, erhalten wir unmittelbar den
Zusatz: Der Grenzwert

$$\beta = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_{H_\rho} |u(Q)| \cos \vartheta_1 d\Omega$$

existiert immer. Wenn β endlich ist, dann ist

$$(25') \quad u(P) = u_0(P) \pm \frac{3}{2\pi} \beta x_1 \quad \text{in } D.$$

Es reduziert sich also u dann und nur dann auf u_0 , wenn der Grenzwert β verschwindet.

Zweiter Teil: Harmonische Funktionen in einem nichtbeschränkten beliebigen Gebiet.

A. Carlemans Ungleichung.

1. Es bezeichne G ein nichtbeschränktes, zusammenhängendes Gebiet des xyz -Raumes und Γ den Rand von G . Der Querschnitt T_z von G mit einer Ebene $z = \text{const.}$ sei für jeden Wert von z in einem Kreis von endlichem Radius enthalten.

Gegeben sei eine Funktion $u(P) = u(x, y, z)$, die in G eindeutig und harmonisch ist und in jedem endlichen Punkt von Γ der Randbedingung

$$(a) \quad \overline{\lim}_{P \rightarrow Q} u(P) \leq -\delta < 0$$

genügt.

Als Mass des Wachstums von u für $z \rightarrow \pm \infty$ führen wir den Ausdruck ein

$$(1) \quad m(z) = \sqrt{\int_{T_z^+} u^2 \, dxdy}.$$

Dabei ist $u^+ = \max(u, 0)$.

Durch Übertragung eines von CARLEMAN¹⁾ stammenden Verfahrens auf den dreidimensionalen Raum²⁾ gelingt es nun leicht, $m(z)$ einer Differentialungleichung zweiter Ordnung zu unterwerfen, die in vielen Fällen eine recht gute untere Schranke für das asymptotische Wachstum von $m(z)$ für $z \rightarrow \pm \infty$ liefert.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit G^* das Teilgebiet von G , wo $u > 0$, mit Γ^* den Rand von G^* und mit T_z^* den Querschnitt von G^* mit der Ebene $z = \text{const.}$ Auf Γ^* ist u harmonisch und identisch gleich Null. Demnach setzt sich Γ^* aus analytischen Flächenstücken zusammen. Wir schreiben jetzt

$$(2) \quad w(z) = m(z)^2 = \int_{T_z^*} u^2 \, dxdy.$$

Berücksichtigt man, dass u auf Γ^* verschwindet, so ist es evident, dass w eine stetige Funktion von z ist, die nur dann verschwindet, wenn T_z^* leer ist. Dasselbe gilt natürlich von $m(z)$. Insbesondere ist $m(z) \equiv 0$ dann und nur dann, wenn $u \leq 0$ in G . Nach dem erweiterten Maximumprinzip ist dann sogar $u < -\delta$ in G .

Das Verschwinden von u auf dem Rande des Integrationsbereiches T_z^* hat weiter zur Folge, dass die Differentiation von $w(z)$ nach z unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf. Man erhält

$$(3) \quad w'(z) = 2 \int_{T_z^*} u \frac{\partial u}{\partial z} \, dxdy$$

als ebenfalls stetige Funktion von z . Andererseits ist

$$w'(z) = 2 \, m(z) \, m'(z).$$

Daher ist auch $m'(z)$ stetig, ausser eventuell an gewissen isoliert liegenden Stellen, wo $m(z)$ verschwindet. Solcher Stellen gibt es übrigens höchstens zwei. Sei nämlich $m(z_1) = m(z_2) = 0$ ($z_1 < z_2$); dann ist auf T_{z_1} und T_{z_2} $u \leq 0$, und daher wegen der Randbedingung (a) auf Γ nach dem Maximumprinzip $u < 0$ für $z_1 < z < z_2$, d.h. $m(z) = m'(z) = 0$, also

1) TORSTEN CARLEMAN, C. R. Acad. Sci., Paris, 196 (1933), pp. 995 — 997.

2) Auch in höherdimensionalen Räumen lässt sich die Methode ohne weiteres durchführen.

$m'(z)$ sicher stetig im Innern dieses Intervalles. Als Unstetigkeitsstellen von $m'(z)$ fallen also nur z_1 und z_2 in Betracht, d.h. Anfangs- und Endpunkt des einzigen möglichen Intervalles, in dem $m(z)$ Null ist.

Da auch noch der Integrand des Integrals in (3) auf I^* verschwindet, ergibt sich $w''(z)$ durch blosse Differentiation dieses Integranden, d.h. es ist

$$w''(z) = 2 \iint_{I_z^*} \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dxdy.$$

Die Harmonizität von u ermöglicht die folgende Umformung mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes:

$$\iint_{I_z^*} u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dxdy = - \iint_{I_z^*} u \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dxdy = + \iint_{I_z^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Damit haben wir für $w''(z)$ den Ausdruck gewonnen

$$(4) \quad w''(z) = 2 \iint_{I_z^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dxdy.$$

Aus (4) ergibt sich sofort, dass w'' eine stetige Funktion von z ist, ausser für diejenigen, isoliert liegenden Werte von z , für die die Ebene $z = \text{const}$ ein ganzes Flächenstück von I^* enthält.

2. Es sollen nun die beiden Integrale

$$\iint_{I_z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dxdy \quad \text{und} \quad \iint_{I_z^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

nach unten abgeschätzt werden.

Zunächst wenden wir die Schwarzsche Ungleichung auf das Integral auf der rechten Seite von (3) an und erhalten

$$\frac{1}{4} w'(z)^2 = \left[\iint_{I_z^*} u \frac{\partial u}{\partial z} dxdy \right]^2 \leq$$

$$\iint_{I_z^*} u^2 dxdy \cdot \iint_{I_z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dxdy = w(z) \cdot \iint_{I_z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dxdy$$

oder

$$(5) \quad \iint_{I_z^*} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dxdy \geq \frac{w'(z)^2}{4 w(z)} = m'(z)^2.$$

Hilfssatz: Sei T ein Gebiet in der xy -Ebene, das von endlich vielen analytischen Kurvenbogen begrenzt ist. Dann gilt für jede im Innern und auf dem Rande von T stetige, auf dem Rande verschwindende Funktion $f(x, y)$ die Ungleichung

$$(6) \quad \int \int_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \lambda^2 \int \int_T f^2 dx dy,$$

sofern das auf der linken Seite der Ungleichung stehende Integral einen Sinn hat. Dabei ist λ^2 der kleinste Eigenwert der partiellen Differentialgleichung der schwingenden Membran

$$(7) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^2 v = 0$$

für das Gebiet T mit der Randbedingung $v = 0$ ¹⁾. Gleichheit besteht in (6) dann und nur dann, wenn $f(x, y)$ mit der zum kleinsten Eigenwert λ^2 gehörenden Eigenfunktion $v(x, y)$ identisch ist.

Bekanntlich ändert sich λ^2 stetig bei einer stetigen Änderung des Gebietes T . Ist ferner T_1 ein echtes Teilgebiet von T_2 , und sind λ_1^2 und λ_2^2 die entsprechenden kleinsten Eigenwerte der Gleichung (7), so ist $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$.

Wir betrachten jetzt wieder den Querschnitt T_z^* von G^* . Er zerfällt i. a. in verschiedene ebene zusammenhängende Teilgebiete $T_z^{*(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$), seine Komponenten, die von analytischen Kurvenbogen begrenzt sind. Seien $\lambda_{(z)}^{(i)2}$ die entsprechenden kleinsten Eigenwerte der Differentialgleichung (7). Wir setzen $\lambda(z)^2 = \min \lambda_{(z)}^{(i)2}$. Dann ist nach dem Hilfssatz

$$\begin{aligned} \int \int_{T_z^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= \sum_i \int \int_{T_z^{*(i)}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\geq \sum_i \lambda_{(z)}^{(i)2} \int \int_{T_z^{*(i)}} u^2 dx dy \geq \lambda(z)^2 \int \int_{T_z^*} u^2 dx dy \end{aligned}$$

oder

$$(8) \quad \int \int_{T_z^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \lambda(z)^2 m(z)^2.$$

¹⁾ Dieser klassische Satz wurde durch H. A. SCHWARZ bewiesen: H. A. SCHWARZ, Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung, Acta soc. sci. fenn. t. XV, pp. 315 — 362; Gesammelte math. Abh. 1. Bd. pp. 241 — 269.

²⁾ H. A. SCHWARZ, loc. cit.

3. Indem wir berücksichtigen, dass $w'' = 2(m'^2 + mm'')$ erhalten wir aus (4), (5) und (8) die für $m(z)$ gültige Differentialungleichung

$$(9) \quad m''(z) \geq \lambda(z)^2 m(z) .$$

Hier hängt indessen die Funktion $\lambda(z)$ noch vom Gebiet G^* , also von der speziell gewählten Funktion $u(x, y, z)$ ab. Um diesen störenden Umstand zu beseitigen, ersetzen wir in der folgenden Weise $\lambda(z)$ durch eine kleinere Funktion $\Lambda(z)$, die nur noch durch das Gebiet G bestimmt ist.

Sei für den Moment T ein beliebiges ebenes Gebiet, T' ein Teilgebiet von T , das von analytischen Bogen begrenzt ist, und λ'^2 der kleinste Eigenwert der Differentialgleichung (7) für T' . Wir ordnen nun dem Gebiet T einen Wert Λ zu durch die Forderung

$$\Lambda = \lim_{T'^-} \lambda' ,$$

wenn alle solchen Teilgebiete T' von T in Betracht gezogen werden. Falls T selbst von analytischen Kurvenbogen berandet ist, dann stellt Λ^2 offenbar den kleinsten Eigenwert von (7) für das Gebiet T dar.

In dieser Weise ordnen wir jeder Komponente $T_{(z)}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) des Querschnittes T_z von G einen Wert $\Lambda_{(z)}^{(i)}$ zu und setzen $\Lambda(z) = \min \Lambda_{(z)}^{(i)}$. Da T_z für jeden endlichen Wert von z nach Voraussetzung ein beschränktes ebenes Gebiet ist, existiert dieses Minimum und ist positiv. Weil ferner jede Komponente von T_z^* echtes Teilgebiet einer Komponente von T_z ist, so hat man

$$(10) \quad \lambda(z) > \Lambda(z) .$$

Es gilt somit der

Satz: Ist u harmonisch in G und sind die Randwerte von u in den endlichen Randpunkten kleiner als eine negative Konstante, so genügt die Funktion

$$m(z) = \sqrt{\iint_{T_z} u^2 dx dy}$$

der Differentialungleichung

$$(11) \quad m''(z) \geq \Lambda(z)^2 m(z) ,$$

überall wo $m''(z)$ existiert. Dabei ist die Funktion $\Lambda(z)$ für jeden Wert von z in der oben erklärten Weise durch Form und Grösse des Querschnittes T_z von G bestimmt.

Die Carlemansche Ungleichung (11) erlaubt nun noch einen Rückschluss auf das Verhalten von $m'(z)$ an einer Unstetigkeitsstelle. Wir haben auf Seite 28 gesehen, dass $m'(z)$ nur an einer Nullstelle von $m(z)$ unstetig sein kann, die nicht im Innern eines Intervalles liegt, in dem $m(z)$ identisch verschwindet, ferner, dass $m(z)$ nur eine einzige, isolierte Nullstelle besitzt oder dann in einem ganzen Intervall den Wert Null annimmt. Sei etwa $m(z_0) = 0$, $m(z) > 0$ für $z < z_0$. Dann ist $m'(z)$ stetig und nach (11) nichtabnehmend für $z < z_0$ und besitzt daher für $z \rightarrow z_0 - 0$ einen Grenzwert, der nicht positiv sein kann, da $m(z)$ abnehmend ist. Ebenso beweist man, dass $\lim_{z \rightarrow z_0 + 0} m'(z) \geq 0$. Wir erhalten somit den

Zusatz: $m(z)$ ist stetig, $m'(z)$ stetig mit Ausnahme von höchstens zwei Stellen, Nullstellen von $m(z)$, wo $m'(z)$ einen positiven Sprung erleiden kann; $m''(z)$ ist stetig ausser für gewisse Werte von z , die sich im Endlichen nicht häufen¹⁾.

B. Asymptotische Auswertung der Differentialungleichung (11).

4. Das Ziel der Betrachtungen dieses Abschnittes wird es sein, aus dem soeben bewiesenen Satze Schlüsse zu ziehen über das Verhalten der Funktion $u(x, y, z)$ in der Umgebung des Randpunktes Unendlich, wenn die Gestalt des Gebietsrandes Γ bekannt ist. Zu diesem Zwecke gehen wir von einer einfachen Überlegung aus, die für die spätere Durchführung als leitende Idee dienen soll.

Wir nehmen im folgenden stets an, es erstrecke sich G auf der Seite positiver z ins Unendliche. Ist dann

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} u(x, y, z) > 0$$

so ist T_z^* von einem gewissen Werte von z an, etwa für $z > z_1$, nichtleer, und daher $m(z) > 0$, $m'(z)$ stetig.

In der Differentialgleichung

$$(12) \quad \Phi''(z) = q(z) \Phi(z)$$

sei $q(z)$ für $z > z_1$ stetig und $0 < q(z) \leq \Lambda(z)^2$. Aus der zweiparametrischen Schar von Lösungen $\Phi(z) = c_1 \Phi_1(z) + c_2 \Phi_2(z)$, die für $z > z_1$ stetig und stetig differenzierbar seien²⁾, wählen wir dasjenige, wohlbestimmte partikuläre Integral der Gleichung (12), das den Anfangsbedingungen

¹⁾ Der letzte Teil dieses Satzes folgt direkt aus einer entsprechenden Feststellung über $w''(z)$; man vergleiche Nr. 1, S. 27.

²⁾ Diese Stetigkeitsbedingungen entsprechen den bewiesenen Eigenschaften der Funktion $m(z)$ und gewährleisten daher die Gültigkeit der Abschätzung (13).

$$\Phi(\zeta) = m(\zeta), \quad \Phi'(\zeta) = m'(\zeta) \quad \zeta > z_1$$

genügt. Ein Vergleich von (11) mit (12) lässt sofort erkennen, dass für $z > z_1$

$$(13) \quad m(z) \geq \Phi(z).$$

Um schliesslich aus dem asymptotischen Verlauf des Ausdruckes $m(z)$ Aufschluss über das Wachstum der betrachteten Funktion $u(x, y, z)$ zu erhalten, werden wir das Maximum $M(z)$ von u auf T_z einführen. Bezeichnen wir mit $A(z)$ den Flächeninhalt von T_z ¹⁾, so wird offenbar

$$(14) \quad M(z) \geq \frac{m(z)}{\sqrt{A(z)}},$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $m(z) = 0$.

Ohne der allgemeinen Fassung des in Nr. 3 aufgestellten Satzes Abbruch zu tun, mehr um die Ideen zu fixieren, wollen wir fortan von der Annahme ausgehen, jeder Querschnitt T_z des Gebietes G sei zusammenhängend. Es handelt sich dann zunächst einmal darum, die in der Ungleichung (11) auftretende Funktion $\Lambda(z)$ aus der Gestalt von G zu bestimmen oder wenigstens eine unseren Zwecken dienende Minorante von $\Lambda(z)$ zu finden.

Zunächst weisen wir auf eine wichtige, elementare Eigenschaft der linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichung (7) hin. Gegeben sei ein ebenes Gebiet T' , für das die Gleichung (7) mit den Randwerten Null lösbar ist für $\lambda = \lambda'_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem linearen Vergrößerungsverhältnis μ gehe T' über in das Gebiet T'' . Dann ist, wie man durch einfache Rechnung sofort verifiziert, die Gleichung (7) in T'' mit verschwindenden Randwerten lösbar für $\lambda = \lambda''_k = \frac{1}{\mu} \lambda'_k$.

Ist z.B. G so beschaffen, dass sich alle Querschnitte T_z ähnlich sind und aus einem von ihnen, T_{z_0} , durch lineare Vergrößerung um $\mu(z)$ ($\mu(z_0) = 1$) hervorgehen, dann ist

$$(15) \quad \Lambda(z) = \frac{1}{\mu(z)} \Lambda(z_0), \quad A(z) = \mu(z)^2 A(z_0).$$

Für gewisse, besonders einfache Konfigurationen von T lässt sich der zugehörige Λ -Wert sofort angeben. Ist z.B. T ein Kreis vom Radius R , so hat man $\Lambda = \alpha/R$, wo $\alpha = 2,4048 \dots$ die erste Nullstelle der Besselschen

¹⁾ Wenn der Flächeninhalt von T_z nicht oder nur schwer bestimmbar ist so sei $A(z)$ der Inhalt eines ebenen Gebietes, das T_z enthält.

Funktion nullter Ordnung $J_0(r)$ ist. Wenn T ein Rechteck mit den Seiten a und b bildet, so wird $\Lambda = \pi(a^{-2} + b^{-2})^{\frac{1}{2}}$.

5. Es gibt zwei Fälle, in denen sich die Differentialgleichung (12) elementar integrieren lässt, wenn man setzt $q(z) = \Lambda(z)^2$:

a) G ist durch eine Zylinderfläche begrenzt, deren Erzeugende parallel zur z -Achse liegen. Dann sind alle Querschnitte T_z kongruent und daher $\Lambda = \text{const.}$ Die Integrale von (12) mit $q(z) = \Lambda^2$ sind durch den Ausdruck

$$\Phi(z) = c_1 e^{\Lambda z} + c_2 e^{-\Lambda z}$$

gegeben, wo c_1 und c_2 Konstanten sind. Die Ungleichung (13) liefert jetzt für das asymptotische Verhalten von $m(z)$ die Beziehung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} m(z) e^{-\Lambda z} > 0.$$

Da $A(z)$ konstant ist, so gilt diese letzte Relation jedenfalls auch, wenn darin $m(z)$ durch $M(z)$ ersetzt wird.

Für das Verhalten der im Zylinderraum harmonischen Funktion u bestehen somit zwei Möglichkeiten in der Umgebung von $z = +\infty$:

$$(16) \quad \text{I. } \overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} u(x, y, z) \leq 0; \quad \text{II. } \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) e^{-\Lambda z} > 0.$$

Wie man sich leicht überzeugt, bleiben die in Abschnitt A durchgeführten Rechnungen und damit die Carlemansche Ungleichung (11) in dem vorliegenden Fall auch dann noch gültig, wenn wir die Randbedingung (a) durch die schwächere Voraussetzung

$$(b) \quad \overline{\lim_{P \rightarrow Q}} u(P) \leq 0$$

ersetzen.

Die Ungleichung (16) II. ist exakt, d.h. es kann darin Λ durch keine grössere Zahl ersetzt werden. Ist nämlich der Querschnitt T des Zylinders von analytischen Kurvenbogen begrenzt, so existiert in T eine Funktion $v(x, y) > 0$, die der partiellen Differentialgleichung (7) für $\lambda = \Lambda$ und der Randbedingung $v = 0$ genügt. $u(x, y, z) = v(x, y) e^{\Lambda z}$ ist harmonisch im Innern von G und besitzt in jedem endlichen Randpunkt den Wert Null, entsprechend der Bedingung (b). Für diese spezielle Funktion hat man $m(z) = a_1 e^{\Lambda z}$, $M(z) = a_2 e^{\Lambda z}$, wo a_1 und a_2 Konstanten sind. In der Ungleichung (11) steht jetzt überall das Gleichheitszeichen.¹⁾

¹⁾ Man vergleiche: Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND, C. R. Acad. Sci. Paris, 229 (1949), pp. 411 — 413.

b) Sei G durch eine Halbkugelfläche $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, z > 0$ begrenzt, deren Spitze im Ursprung 0 liegt. Auch jetzt ist die Randbedingung (b) hinreichend. Wir nehmen an, sie sei erfüllt für jeden endlichen Punkt des Halbkugels mit Ausnahme der Kegelspitze 0 . So haben wir die Möglichkeit, die Carlemansche Ungleichung, die jetzt für $0 < z < \infty$ besteht, gleichzeitig zur Untersuchung des Verhaltens von u in der Umgebung der zwei singulären Punkte Unendlich und 0 heranzuziehen.

Jeder Querschnitt T_z des Halbkugelraumes G entsteht aus $T_1(T_z$ für $z=1$) durch ähnliche Vergrößerung um den Faktor z . Aus (15) folgt daher für $z_0=1, \mu(z) = z$

$$\Lambda(z) = \frac{\Lambda(1)}{z}, \quad A(z) = z^2 \Lambda(1).$$

Die Differentialgleichung (12) mit $q(z) = z^{-2} \Lambda(1)^2$ besitzt das allgemeine Integral

$$\Phi(z) = c_1 z^k + c_2 z^{1-k}$$

wo die Exponenten k und $1-k$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $k(k-1) = \Lambda(1)^2$ sind. Eine der Lösungen dieser Gleichung, etwa k , ist grösser als 1 . Es ergeben sich die folgenden asymptotischen Beziehungen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} m(z) z^{-k} > 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} m(z) z^{k-1} > 0.$$

Da jetzt $M(z) \geq cm(z) z^{-1}$, so folgt:

Für $z \rightarrow \infty$ bestehen folgende beiden Möglichkeiten:

$$(17) \quad \text{I. } \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} u(x, y, z) \leq 0; \quad \text{II. } \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} M(z) z^{-(k-1)} > 0;$$

und für $z \rightarrow 0$:

$$(17') \quad \text{I. } \overline{\lim}_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) \leq 0; \quad \text{II. } \overline{\lim}_{z \rightarrow 0} M(z) z^k > 0.$$

Als Beispiel nehmen wir den geraden Kreiskegel vom halben Öffnungswinkel γ , dessen Achse mit der z -Achse zusammenfällt. Dann ist $\Lambda(1) = \alpha \operatorname{ctg} \gamma$ und $k \cong \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 23 \operatorname{ctg}^2 \gamma})$. Die so erhaltenen Abschätzungen für $M(z)$ sind umso ungenauer, je grösser der Winkel γ ist. Für $\gamma \rightarrow \pi/2$ strebt ja k gegen Eins, während wir im ersten Teil Nr. 3 gesehen haben, dass für Funktionen, die im Halbraum $z > 0$ harmonisch sind und für jeden endlichen Punkt Q der Ebene $z = 0$ der Bedingung (b)

genügen, die Ungleichungen (17) und (17') mit $k = 2$ erfüllt sind ¹⁾, was natürlich umso eher zutrifft, wenn das zugrundegelegte Gebiet nur ein Teilgebiet des Halbraumes ist.

6. Mit $q = \text{const.}$ und $q(z) = \text{const. } z^{-2}$ sind die Fälle bereits erschöpft, in denen sich die Gleichung (12) exakt elementar integrieren lässt. Um für ein beliebiges $\Lambda(z)$ eine Aussage über das Verhalten von $m(z)$ zu erhalten, wollen wir direkt aus CARLEMANS Ungleichung (11) für $m(z)$ eine asymptotisch gültige Näherungsformel herleiten ²⁾.

Wir gehen wieder von der Annahme aus, es erstrecke sich G auf der Seite positiver z ins Unendliche und es sei u nicht beschränkt für $z \rightarrow \infty$. Es existiert dann eine Zahl z_1 , sodass für $z > z_1$ $m'(z) > 0$. Wir setzen

$$m(z) = e^{\psi(z)}.$$

Die Ungleichung (11) transformiert sich dadurch in

$$\psi'(z)^2 + \psi''(z) > \Lambda(z)^2.$$

Da $\psi' > 0$ ist für $z > z_1$, hat man

$$\psi' + \frac{1}{2} \frac{\psi''}{\psi'} > \sqrt{\psi'^2 + \psi''} > \Lambda,$$

woraus durch Integration folgt

$$\frac{1}{2} \log m(z) m'(z) = \psi(z) + \frac{1}{2} \log \psi'(z) \geq \int_{z_1}^z \Lambda(s) ds + \text{const.}$$

oder

$$(18) \quad \frac{d}{dz} m(z)^2 \geq a^2 e^{2 \int_{z_1}^z \Lambda(s) ds},$$

wo a eine positive Konstante darstellt. Wir integrieren nochmals von z_1 bis z und berücksichtigen, dass $m(z_1)^2 \geq 0$. Wir erhalten so die Abschätzung

$$(19) \quad m(z)^2 \geq a^2 \int_{z_1}^z e^{2 \int_{z_1}^s \Lambda(s) ds} dz.$$

¹⁾ Diese Behauptung folgt direkt aus den Sätzen S. 15 und S. 16. Dabei haben wir natürlich unter $M(z)$ das Maximum von u auf der ganzen Ebene $z = \text{const.}$ zu verstehen

²⁾ Man vergleiche dazu: CARLEMAN, loc. cit.

Wir wählen dazu folgendes Beispiel: Die Ungleichung $x^2 + y^2 < \varrho^2 z$ stellt das Innere eines Rotationsparaboloides dar, dessen Scheitelpunkt der Ursprung 0 und dessen Achse die z -Achse ist. Angenommen wir wüssten von G nur, dass es Teilgebiet dieses paraboloidischen Raumes ist, so können wir jedenfalls folgern $\Lambda(z) \geq \frac{a}{\varrho} z^{-\frac{1}{2}}$. Eine einfache Rechnung ergibt dann, dass nach Formel (19)

$$m(z) \geq a e^{2 \frac{a}{\varrho} z^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{1}{4}}$$

sobald z grösser ist als eine gewisse Zahl z_1 , es sei denn, dass u beschränkt ist in G . Berücksichtigen wir noch die Relation $M(z) \geq \pi^{\frac{1}{2}} \varrho^{-1} z^{-\frac{1}{2}} m(z)$, so ergeben sich für u folgende Möglichkeiten:

$$\text{I. } u(x, y, z) \leq -\delta \text{ in } G; \quad \text{II. } M(z) > c e^{2 \frac{a}{\varrho} z^{\frac{1}{2}}} z^{-\frac{1}{2}} (c > 0), z > z_1.$$

7. Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, bei vorgegebenem Gebiet G die Funktion $\Lambda(z)$ zu bestimmen, sind doch die Eigenwerte der partiellen Differentialgleichung (7) der schwingenden Membran nur für einige wenige, sehr spezielle Konfigurationen des ebenen Gebietes T bekannt. Nehmen wir aber an, es stehe uns wenigstens der Flächeninhalt $A(z)$ des Gebietsquerschnittes T_z für jeden Wert von z zur Verfügung, so lässt sich leicht eine Abschätzung von $\Lambda(z)$ nach unten angeben und zwar nach einem Satz, der zuerst von LORD RAYLEIGH¹⁾ vermutet und später durch FABER²⁾ bewiesen wurde.

Der Satz von RAYLEIGH drückt die Tatsache aus, dass der kleinste Eigenwert der partiellen Differentialgleichung der schwingenden Membran bei der Randbedingung $v = 0$ dann am kleinsten ist, wenn das zugrundegelegte Gebiet T eine Kreisscheibe ist, falls zur Konkurrenz alle flächengleichen Gebiete zugelassen sind, die von stückweise analytischen Kurven begrenzt werden.

Nach unserer Definition in Nr. 3 ist $\Lambda(z)^2$ die untere Grenze der kleinsten Eigenwerte $\lambda(z)^2$ von (7) aller ebenen Gebiete, die dem Querschnitt T_z einbeschrieben und von stückweise analytischen Kurven begrenzt sind. Daraus folgt unmittelbar

$$(20) \quad \Lambda(z) \geq a \pi^{\frac{1}{2}} A(z)^{-\frac{1}{2}} \cong 4,2624 A(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

¹⁾ J. W. S. RAYLEIGH, The Theory of Sound, 2nd ed., London (1894), p. 339 — 343.

²⁾ Faber, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. (1923), pp. 169 — 172; vergl. auch: Krahn, Math. Annalen, Bd. 94 (1925), pp. 97 — 100; ferner: Polya und Szegő, Am. Journ. of Math., Bd. 67 (1945), pp. 1 ff.

Diese Abschätzung ist umso ungenauer, je mehr T_z von der Kreisform abweicht. Falls T_z eine exzentrische Form aufweist, fährt man daher oft besser, indem man $\Lambda(z)^2$ durch den kleinsten Eigenwert eines Rechtecks ersetzt, das T_z enthält, als bei Verwendung der Ungleichung (20).

Damit ist es gelungen, dem Wachstum von $M(z)$ für $z \rightarrow \infty$ eine untere Schranke zu setzen, sobald der Flächeninhalt $A(z)$ des Gebietsquerschnittes T_z für grosse Werte von z , etwa für $z > z_1$ bekannt ist. Aus (14) und (19) ergibt sich in Verbindung mit (20) der

Satz: *Erstreckt sich das Gebiet G auf der Seite positiver z ins Unendliche, und ist $A(z)$ für $z > z_1$ der Flächeninhalt des Schnittes T_z von G durch die Ebene $z = \text{const.}$, dann bestehen für jede in G harmonische Funktion $u(P)$, die in allen endlichen Randpunkten Q von G der Bedingung $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq K$ (K eine Konstante) genügen, folgende Möglichkeiten:*

$$(21) \quad \begin{aligned} \text{I.} \quad & \overline{\lim_{z \rightarrow +\infty}} u(x, y, z) \leq K; \\ \text{II.} \quad & M(z) \geq c A(z)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\int_{z_1}^z e^{2a\pi \int_{z_1}^s A(s)^{-\frac{1}{2}} ds} dz} \end{aligned}$$

von einem gewissen Wert von z an.

Dabei ist das Maximum von u^+ auf T_z mit $M(z)$ bezeichnet, und $a = 2,4048 \dots$ ist die kleinste positive Nullstelle der Besselschen Funktion nullter Ordnung $J_0(r)$. c stellt eine positive Konstante dar.

Falls das Gebiet G im Halbraum $z < 0$ nicht ins Unendliche reicht, kann nach dem Maximumprinzip I ersetzt werden durch

$$\text{I}'. \quad u(P) \leq K \text{ in } G.$$

Der Randbedingung (a) entsprechend hätte vorausgesetzt werden müssen, dass K negativ sei. Dann ist tatsächlich II für jedes $z > z_1$ erfüllt. Man überlegt sich sofort, dass auch bei positivem K die Ungleichung II für genügend grosse Werte von z besteht.

8. Die Herleitung der CARLEMANSchen Ungleichung in Abschnitt A liefert uns zugleich die Handhabe, um das Wachstum des Dirichletschen Integrales

$$(22) \quad D(z) = \int_{z_1}^z \left\{ \iint_{T_z} \left[\left(\frac{\partial u^+}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy \right\} dz$$

der Funktion $u^+(P)$, erstreckt über den zwischen T_{z_1} und T_z ($z > z_1$) liegenden Teil von G , für $z \rightarrow \infty$, zu untersuchen. Unter Verwendung der in Nr. 1 eingeführten Bezeichnungsweise können wir nach Gleichung (4) schreiben

$$D'(z) = \frac{1}{2} w''(z) ;$$

somit

$$D(z) = \frac{1}{2} w'(z) + \text{const.}$$

Die rechte Seite schätzen wir gemäss (18) nach unten ab und erhalten folgendes Resultat:

Trifft unter den Voraussetzungen des Satzes von Nr. 7 der Fall II zu, so genügt das durch (22) definierte Dirichletsche Integral $D(z)$ von einem gewissen Werte von z an der Ungleichung

$$(23) \quad D(z) \geq c' e^{\frac{1}{2} \int_{z_1}^z A(s)^{-\frac{1}{2}} ds}.$$

Dabei ist c' eine positive Konstante.

9. *Schlussbemerkung.* Es wurde bereits in Nr. 5 darauf hingewiesen, dass es Funktionen $u(P)$ gibt, die im Innern eines zylindrischen Raumes harmonisch sind, auf dessen Oberfläche verschwinden und für die die Differentialungleichung (11) zur Gleichung wird. Tatsächlich kann dies auch nur im Falle eines zylinderförmigen Gebietes vorkommen. Denn in diesem Fall muss in (5) und (8) das Gleichheitszeichen herrschen. In (5) ist dies aber dann und nur dann der Fall, wenn $u(x, y, z)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = p(z) u(x, y, z)$$

genügt, wo p eine willkürliche Funktion von z ist. Daraus folgt, dass u die Form hat $u(x, y, z) = v(x, y) \cdot t(z)$. Damit aber in (8) Gleichheit besteht, muss $v(x, y)$ erste Eigenfunktion von (7) für das ebene Gebiet T_z sein. Also ist T_z von z unabhängig, G ein Zylinderraum, parallel der z -Achse.

Diese Erscheinung hängt offenbar damit zusammen, dass es die zur z -Achse parallelen Zylinderflächen sind, die orthogonal liegen zu den Ebenen $z = \text{const.}$, die wir zur Erzeugung der Querschnitte T_z verwendet haben. Es ist daher zu vermuten, dass man auf Grund einer der CARLEMANSchen entsprechenden Methode dann die schärfsten Abschätzungen des PHRAGMÉN — LINDELÖFSchen Typus gewinnt, wenn man eine Schar von Schnittflächen des zugrundeliegenden Gebietes betrachtet, die als Orthogonalflächenschar der Gebietsoberfläche ausgezeichnet ist.

Curriculum vitae.

Am 14. Februar 1922 wurde ich, Hans Heinrich Keller, gebürtig von Zürich und Wetzikon (Kt. Zch.), in Wetzikon geboren, wo ich die Primarschule besuchte. Nach zwei Jahren Sekundarschule in Zürich trat ich in die Kant. Handelsschule Zürich ein, wo ich im Herbst 1940 das Handelsmaturitätszeugnis erwarb. Am Institut »Juventus« bereitere ich mich daraufhin auf die Ergänzungsprüfung zur Handelsmaturität vor, die ich im Frühjahr 1941 bestand, um mich anschliessend an der philosophischen Fakultät II der Universität Zürich zu immatrikulieren. Im Sommer 1947 erlangte ich das Diplom für das höhere Lehramt. Die folgenden Semester benutzte ich zur Vertiefung meiner Kenntnisse und beschäftigte mich gleichzeitig mit der vorliegenden Arbeit.

Während meines Studiums hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren AHLFORS, W. BRUNNER, J. J. BURCKHARDT, DÜRR, FINSLER, FUETER, GUT, v. HALBAN, HOPF (E. T. H.), KARRER, E. MEYER, NEVANLINNA, SPEISER, WENTZEL; ihnen allen möchte ich an dieser Stelle für den anregenden Unterricht herzlich danken.

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Prof. Dr. R. NEVANLINNA, dem ich für das stets wohlwollende Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, zu ganz besonderem Dank verpflichtet bin.

Zürich, im Dezember 1949.

